STUDI TENTANG KOLEKSI IDEAL DALAM RING KOMUTATIF

Madyunus Salayan[1)]
Machrani Adi Putri Siregar[2)]

Universitas Muslim Nusantara Al-Washliyah
Jl. Garu II A, Harjosari I, Kec. Medan Amplas, Kota Medan, Sumatera Utara
e-mail : madyunussalayan@umnaw.ac.id

Abstrak

Studi literatur ini bertujuan untuk mendalami bidang Aljabar Abstrak, khususnya mengenai operasi pada ideal dalam ring komutatif. Dimulai dengan peninjauan terhadap operasi-operasi penjumlahan, perkalian, irisan dan hasil bagi pada koleksi ideal dalam ring komutatif. Dengan didasarkan pada sifat-sifat operasi-operasi pada koleksi ideal tersebut ternyata ada koleksi ideal di dalam ring komutatif dengan operasi-operasi di atas yang memenuhi sifat tertutup, assosiatif dan mempunyai identitas, tetapi tidak mempunyai invers.

Kata Kunci *: Ideal, Koleksi Ideal, Ring Komutatif.*

Abstract

This literature study aims to explore the field of Abstract Algebra, especially regarding operations on the ideal in the commutative ring. It begins with a review of the operations of addition, multiplication, slice and quotient on the ideal collection in the commutative ring. Based on the characteristics of the operations on the ideal collection, it turns out that there is an ideal collection in the commutative ring with the above operations which fulfill the closed, associative and identity characteristics, but do not have an inverse.

Keywords *: Ideal, Ideal Collection, Commutative Ring.*

1. PENDAHULUAN

Ring merupakan struktur aljabar yang terdiri dari suatu himpunan beserta dua hukum komposisi yang disajikan dengan tanda penjumlahan, perkalian dan memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Jika di dalam ring tersebut operasi perkaliannya memenuhi sifat komutatif, maka ringnya disebut dengan ring komutatif. Dengan demikian ring komutatif adalah suatu bentuk khusus dari ring, yakni yang memenuhi sifat komutatif perkalian.

Sementara itu diketahui bahwa jika setiap elemen dari ring bila digandakan dengan elemen subring, akan termuat dalam subring itu juga, maka subring yang demikian disebut dengan ideal. Jadi ideal adalah merupakan suatu subring yang khusus dalam ringnya. Seperti halnya di dalam grup, dimana subgrupnya mempunyai beberapa operasi, demikian juga halnya dengan ideal.

Dengan demikian, ideal sebagai subring yang khusus dalam ring komutatif akan ditinjau lebih mendalam. Dimulai dengan peninjauan terhadap operasi-operasi pada koleksi ideal, yaitu operasi-operasi penjumlahan, perkalian, irisan dan hasil bagi.

Berdasarkan uraian tersebut, rumusan masalah penelitian ini adalah bagaimana sifat operasi-operasi penjumlahan (+), perkalian (x), irisan (∩) dan hasil bagi (:) pada koleksi ideal dalam ring komutatif. Kemudian akan ditunjukkan apakah koleksi ideal dalam ring komutatif tersebut dengan operasi-operasi di atas dapat membentuk sebuah grup.

2. METODE

Waktu penelitian ini dilakukan yaitu pada tahun ajaran 2020/2021 yang dilaksanakan sejak bulan Juni 2020 sampai Desember 2020. Sedangkan tempat penelitian ini dilaksanakan di Universitas Muslim Nusantara Al-Washliyah Medan.

Penelitian ini adalah studi kasus. Studi kasus adalah salah satu metode penelitian yang menggunakan cara-cara yang sistematis dalam melakukan pengamatan, pengumpulan data, analisis informasi, dan pelaporan hasilnya. Sebagai hasilnya, akan diperoleh pemahaman yang mendalam tentang mengapa sesuatu terjadi dan dapat menjadi dasar bagi riset selanjutnya.

Tahapan yang akan dilakukan pada penelitian ini disusun atas suatu kerangka pemikiran yang langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:

1. Pertama akan disajikan konsep tentang grup dan ring secara umum.
2. Selanjutnya akan disajikan mengenai ring komutatif sebagai dasar penelitian ini. Dan juga diperlihatkan macam-macam ring, seperti: ring tanpa pembagi nol, daerah integral, ring pembagian (*division ring*), field dan skew field.
3. Kemudian akan dikemukakan juga mengenai subring dan ideal untuk menunjang pembicaraan berikutnya, juga mengenai homomorphisma ring dan ring kelas residu.
4. Kemudian akan diperlihatkan definisi operasi pada ideal dimana akan ditinjau empat operasi, yaitu: operasi penjumlahan, perkalian dan dilanjutkan dengan irisan dan hasil bagi.
5. Seterusnya akan diperlihatkan sifat dan hubungan operasi penjumlahan, perkalian, irisan dan hasil bagi pada koleksi ideal di dalam ring komutatif.
6. Terakhir akan diperlihatkan bahwa koleksi ideal dalam ring komutatif dengan masing-masing operasi ada yang memenuhi sifat *closure*, assosiatif, mempunyai identitas tetapi tidak mempunyai invers.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Seperti yang telah dikemukakan pada maksud dan tujuan dari penelitian ini, maka akan diperlihatkan operasi-operasi pada ideal dalam ring komutatif. Akan ditinjau empat operasi, yaitu penjumlahan, perkalian, irisan dan hasil bagi (*residual devision*). Pertama sekali akan diperlihatkan definisi-definisi operasi-operasi tersebut.

Jika R sebuah ring dan A, B adalah dua buah ideal dalam R. Didefinisikan:

i. $A + B = \{ a + b \mid a \in A, b \in B \}$
A + B disebut jumlah dua buah ideal A dan B.

ii. $AB = \{ \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \mid a_i \in A, b_i \in B, n = 1, 2, 3, \dots \}$
AB disebut hasil kali dua buah ideal A dan B.

iii. $A \cap B = \{ a \mid a \in A, a \in B \}$
$A \cap B$ disebut irisan dua buah ideal A dan B.

iv. $A : B = \{ r \in R, rb \in A, \forall\, b \in B \}$
A : B disebut hasil bagi dua buah ideal A dan B.

Teorema:
Jika R sebuah ring dan A, B dan C merupakan ideal-ideal dalam R, maka:

i. a. $A + B = B + A$
b. $A + (B + C) = (A + B) + C$

ii. a. $AB = BA$
b. $A(BC) = (AB)C$
c. $A(B+C) = AB + AC$

iii. a. $A \subseteq A + B$

b. $AB \subseteq A \cap B$

iv. a. $(A : B) = B \subseteq A$

b. $A \subseteq (A : B)$

Bukti:

i. a. $A + B = \{ a + b \mid a \in A, b \in B \}$

$= \{ b + a \mid a \in A, b \in B \}$

Karena $a, b \in R$ ring komutatif

b. $A + (B + C) = \{ a + (b + c) \mid a \in A, b \in B, c \in C \}$

$= \{ (a + b)c \mid a \in A, b \in B, c \in C\}$

$= (A + B) + C$

ii. a. $AB = \{ \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \mid a_i \in A, b_i \in B, n = 1, 2, 3, \dots \}$

$= \{ \sum_{i=1}^{n} b_i a_i \mid a_i \in A, b_i \in B, n = 1, 2, 3, \dots \}$

$= BA$

b. $A (BC) = (AB)C$

Jika $BC = D$ dan $AB = E$

$AD = \{ \sum_{i=1}^{n} a_i d_i \mid a_i \in A, d_i \in D, n = 1, 2, 3, \dots \}$

Jika $d_i \in D$ berarti $d_i = \{ \sum_{i=1}^{n} b_i c_i \mid b_i \in B, c_i \in C, n = 1, 2, 3, \dots \}$

Jadi $AD = a_1(b_1c_1 + \dots + b_nc_n) + \dots + a_n(b_1c_1 + \dots + b_nc_n)$

$= a_1(b_1c_1) + \dots + a_1(b_nc_n) + \dots + a_2(b_2c_2) + \dots + a_n(b_nc_n)$

$= (a_1b_1)c_1 + \dots + (a_1b_n)c_n + \dots + (a_2b_2)c_2 + \dots + (a_nb_n)c_n$

$= EC$

dimana $EC = \{ \sum_{i=1}^{n} e_i c_i \mid e_i \in E, c_i \in C, n = 1, 2, 3, \dots \}$

$e_i \in E$ berarti $e_i = \{ \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \mid a_i \in A, b_i \in B, n = 1, 2, 3, \dots \}$

Jadi $A(BC) = (AB)C$

c. $A(B+C) = \{ \sum_{i=1}^{n} a_i(b_i+c_i) \mid a_i \in A, b_i \in B, c_i \in C, n = 1, 2, 3, \dots \}$

$= \{ \sum_{i=1}^{n} (a_ib_i+a_1c_i) \}$

$= \{ \sum_{i=1}^{n} a_ib_i + \sum_{i=1}^{n} a_1c_i \}$

$= AB + AC$

iii. a. Ambil $a \in A$ maka $a = a + 0$; $a \in A$, $0 \in B$ jadi $a \in A + B$ sehingga $a \subseteq (A + B)$

b. Ambil $x \in AB$ maka $x = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i \mid a_i \in A, b_i \in B$ karena $b_i \in B \subseteq R$ maka $b_i \in R$ dan diketahui A ideal.

Jadi $ab \in A$, $\forall$ i juga $\sum_{i=1}^{n} a_ib_i \mid a_i \in A, x \in A, AB \subseteq A$.

Dengan cara yang sama diperoleh bahwa $AB \subseteq B$.

Jadi $AB \subseteq A \cap B$.

iv. a. Ambil $x \in (A : B)$ B.

Jadi $x = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i \mid a_i \in A : B, b_i \in B, n = 1, 2, 3, \dots$

$a_i \in A : B$ menurut definisi $a_ib_i \in A$, $\forall$ $b_i \in B$.

Juga $\sum_{i=1}^{n} a_ib_i \in A$. Jadi $x \in A$.

Sehingga $(A : B)B \subseteq A$.

b. Ambil $x \in A$.

Karena A ideal, maka $xb \in A$, $\forall$ $b \in B$. Jadi $x \in A$, sehingga $A \subseteq A : B$.

Teorema:

Jika $B \subseteq A$ maka $A \cap (B + C) = B + A \cap C$

Bukti:

Ambil $x \in A \cap (B + C)$, maka $x \in A$, $x \in B + C$,

$x \in B + C \Rightarrow x = b + c$, $b \in B$, $c \in C$,

$x - b = c$; $c \in A$, karena $x \in A$, $b \in A$; ($B \subseteq A$)
jadi $x = b + c$, dimana $b \in B$, $c \in A \cap C$
sehingga $A \cap (B + C) \subseteq B + A \cap C$.
Ambil $x \in B + A \cap C$
$\Rightarrow x = b + c$, $b \in B$, $c \in A \cap C$
$\Rightarrow c \in A$, $c \in C$
$x = b + c$, dengan $b \in B$, $c \in C$.
Jadi $x = b + c \in B + C$, $b \in B$,
karena $B \subseteq A$, maka $b \in A$ sehingga $x = b + c$,
dimana $b \in A$, $c \in A \Rightarrow x = b + c \in A$
jadi $x \in A$, $x \in B + C \Rightarrow x \in A \cap (B + C)$
terbukti pula: $B + A \cap C \subseteq A \cap (B + C)$
jadi: $A \cap (B + C) = B + A \cap C$.

Teorema:
Jika A dan B ideal-ideal dalam ring R, maka:
i. $A + B$
ii. AB
iii. $A \cap B$
iv. $A : B$
Masing-masing ideal dalam ring R.

Bukti:
i. Ambil $x, y \in A + B$ dan $r \in R$
Apakah $x - y \in A + B$, $rx \in A + B$.
$x \in A + B \Rightarrow x = a_1 + b_1$, $a_1 \in A$, $b_1 \in B$
$y \in A + B \Rightarrow y = a_2 + b_2$, $a_2 \in A$, $b_2 \in B$
$x - y = (a_1 + b_1) - (a_2 + b_2)$
$= (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)$
Karena A ideal, maka $a_1 - a_2 \in A$ dan karena B ideal, maka $b_1 - b_2 \in B$, sehingga $x - y \in A + B$.
$rx = r\,(a_1 + b_1) = ra_1 + rb_1$.
Karena A ideal, maka $ra_1 \in A$ dan karena B ideal, maka $rb_1 \in B$, sehingga $rx \in A + B$.
ii. Ambil $x, y \in AB$ dan $r \in R$
Apakah $x - y \in AB$, $rx \in AB$.
$x \in AB \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$, $a_i \in A$, $b_i \in B$
$y \in AB \Rightarrow y = \sum_{i=1}^{m} c_i d_i$, $c_i \in A$, $d_i \in B$
$x - y = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i - \sum_{i=1}^{m} c_i d_i$
$= \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{i=1}^{m} (-c_i) d_i$
$= \sum_{i=1}^{n+m} e_i f_i$
dimana $e_i = a_i$; $1 \leq i \leq n$
$e_i = -c_i$; $n + 1 \leq i \leq m$
$f_i = b_i$; $1 \leq i \leq n$
$f_i = d_i$; $n + 1 \leq i \leq m$
Jadi $e_i \in A$ dan $f_i \in B$ dan $x - y \in AB$
$rx = r\,(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i) = \sum_{i=1}^{n} (ra_i) b_i$
karena A ideal maka $ra_i \in A$.

Jadi $rx \in AB$.

iii. Ambil $x, y \in A \cap B$ dan $r \in R$
Apakah $x - y \in A \cap B$
$rx \in A \cap B$ dimana $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A, x \in B$
$y \in A \cap B \Rightarrow y \in A, y \in B$
Karena A ideal maka $x - y \in A$ dan karena B ideal maka $x - y \in B$ sehingga $x - y \in A \cap B$.
$rx \in A$ dan $rx \in B$ karena A dan B ideal, sehingga $rx \in A \cap B$.

iv. Ambil $x, y \in A : B$ dan $r \in R$
Apakah $x - y \in A : B$ dan $rx \in A : B$ dimana $x \in A : B \Rightarrow xb \in A, \forall b \in B$
$y \in A : B \Rightarrow yb \in A, \forall b \in B$
Karena A ideal, maka $xb - yb \in A$.
$xb - yb = (x - y)b \in A, \forall b \in B$ sehingga $x - y \in A : B$ juga karena A ideal,
$r(xb) \in A$.
$r(xb) = (rx)b \in A, \forall b \in B$, sehingga $rx \in A : B$.

Teorema:
Jika R sebuah ring dan $A_i, B_i, \forall i = 1, 2, 3, \ldots, n$ dan C adalah ideal-ideal dalam ring R, maka hubungan-hubungan berikut berlaku:

i. $\bigcap_{i=1}^{n} A_i : B = \bigcap_{i=1}^{n} (A_i : B)$
ii. $A : \sum_{i=1}^{n} B_i = \bigcap_{i=1}^{n} (A : B_i)$
iii. $(A : B) : C = A : (BC)$

Bukti:

i. Ambil $x \in \bigcap_{i=1}^{n} (A_i : B)$
$xb \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i, \forall b \in B \Rightarrow xb \in A_i, \forall i = 1, 2, 3, \ldots, n$
sehingga $x \in A_i : B, \forall i = 1, 2, 3, \ldots, n$ atau $x \in \bigcap_{i=1}^{n} (A_i : B)$
Jadi $\bigcap_{i=1}^{n} A_i : B \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} (A_i : B)$
Ambil $x \in \bigcap_{i=1}^{n} (A_i : B)$
$x \in \bigcap_{i=1}^{n} (A_i : B) \Rightarrow x \in A_i : B, \forall i = 1, 2, 3, \ldots, n$
$x \in A_i : B \Rightarrow xb \in A_i, \forall i = 1, 2, 3, \ldots, n, \forall b \in B$
atau $xb \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i, \forall b \in B$ sehingga $x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i : B$
jadi $\bigcap_{i=1}^{n} (A_i : B) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} A_i : B$
terbuktilah: $\bigcap_{i=1}^{n} A_i : B = \bigcap_{i=1}^{n} (A_i : B)$

ii. Ambil $x \in A : \sum_{i=1}^{n} B_i$
$x \in A : \sum_{i=1}^{n} B_i \Rightarrow xb_i \in A, \forall b_i \in B_i, \forall i = 1, 2, 3, \ldots, n$
$xb_1 \in A, \forall b_1 \in B_1$ sehingga $x \in A : B_1$
$xb_2 \in A, \forall b_2 \in B_2$ sehingga $x \in A : B_2$
dan seterusnya sampai n.
$xb_n \in A, \forall b_n \in B_n$ sehingga $x \in A : B_n$
jadi $x \in A : B_i ; \forall i = 1, 2, 3, \ldots, n$
atau $x \in \bigcap_{i=1}^{n} (A : B_i)$
jadi $A : \sum_{i=1}^{n} B_i \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} (A : B_i)$.
Ambil $x \in \bigcap_{i=1}^{n} (A : B_i)$
$x \in \bigcap_{i=1}^{n} (A : B_i) \Rightarrow x \in A : B_i, \forall i = 1, 2, 3, \ldots, n$
$x \in A : B_1 \Rightarrow xb_1 \in A, \forall b_1 \in B_1$
$x \in A : B_2 \Rightarrow xb_2 \in A, \forall b_2 \in B_2$
dan seterusnya sampai n.
$x \in A : B_n \Rightarrow xb_n \in A, \forall b_n \in B_n$.

Karena A ideal maka $xb_1 + xb_2 + ... + xb_n \in A$
$x (b_1 + b_2 + ... + b_n) \in A, \forall b_i \in B_i, \sum_{i=1}^{n} b_i \in \sum_{i=1}^{n} B_i$
sehingga $x \in A : \sum_{i=1}^{n} B_i$.
Jadi $\bigcap_{i=1}^{n} (A : B_1) \subseteq A : \sum_{i=1}^{n} B_i$.
Terbuktilah: $A : \sum_{i=1}^{n} B_i = \bigcap_{i=1}^{n} (A : B_i)$.

iii. Ambil $x \in (A : B) : C \Rightarrow xc \in (A : B), \forall c \in C$
juga $(xc)b \in A, \forall b \in B$.
$(xc)b = x(cb) = x(bc) \in A, \forall bc \in BC \Rightarrow x \in A : BC$
Ambil $x \in A : BC \Rightarrow x (\sum_{i=1}^{n} b_i c_i) \in A, b_i \in B, c_i \in C$.
$x (\sum_{i=1}^{n} b_i c_i) = x (\sum_{i=1}^{n} c_i b_i) = \sum_{i=1}^{n} (xc_i) b_i \in A$
ambil $b_i = b$, diperoleh $\sum_{i=1}^{n} (xc_i) b_i = b \sum_{i=1}^{n} (xc_i) \in A, \forall b \in B$
sehingga $\sum_{i=1}^{n} (xc_i) = x \sum_{i=1}^{n} c_i \in A : B \Rightarrow xc \in (A : B), \forall c \in C$.
Jadi akhirnya diperoleh $x \in (A : B) : C$.
Terbukti pula $(A : B) : C = A : BC$

Setelah diperlihatkan sifat-sifat operasi pada koleksi ideal dalam ring komutatif, maka akan diselidiki apakah koleksi ideal dengan operasi penjumlahan, perkalian, irisan dan hasil bagi dapat membentuk grup atau tidak.

Jika I(R) adalah koleksi dari semua ideal dalam ring komutatif R.

i. Akan diperlihatkan apakah $< I(R), + >$ suatu grup.
1. *Closure* dipenuhi dengan teorema sebelumnya.
2. Assosiatif dipenuhi dengan teorema sebelumnya.
3. Elemen identitas adalah {0} karena: $A + \{0\} = \{ a + 0 \mid a \in A, 0 \in \{0\}\} = \{a \mid a \in A\} = A$
$\{0\} + A = \{ 0 + a \mid 0 \in \{0\}, a \in A\} = \{a \mid a \in A\} = A$
Jadi $A + \{0\} = \{0\} + A = A$
karena $\{0\} \in I(R)$, elemen identitas {0}.
4. Elemen invers
Misalkan B adalah invers dari suatu ideal $A \in I(R)$.
$A + B = \{0\}$
$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\} = \{0\}$
Dari sini diperoleh: $a + b = 0$
tapi $a + b = 0$ hanya dipenuhi oleh satu elemen b, yaitu: $b = a^{-1} = -a$.
Hal ini bertentangan dengan definisi bahwa: $a + b = 0$, untuk semua $a \in A$ dan untuk semua $b \in B$.

Maka aksioma ini tidak dipenuhi oleh "+" untuk memenuhi syarat grup.
Karena $< I(R), + >$ tidak memenuhi salah satu aksioma grup, maka $< I(R), + >$ bukan suatu grup, tetapi merupakan suatu monoid.

ii. Akan diperiksa apakah $< I(R), . >$ merupakan grup.

1. *Closure* dipenuhi dengan teorema sebelumnya.
2. Assosiatif dipenuhi dengan teorema sebelumnya.
3. Identitasnya adalah R
Bukti:
   - Dari teorema diperoleh bahwa $A . R \subseteq A$.
   - Karena A suatu ideal, maka $a . r \in A$ untuk $a \in A$ dan untuk $r \in R$ dan A tertutup di bawah operasi + pada ring R.

Oleh karena itu setiap $x \in A$, ada $a_i \in A$ dan $r_i \in R$, $i = 1, 2, 3, ..., n$ sedemikian sehingga:

$x = a_1r_1 + a_2r_2 + ... + a_nr_n = \sum_{i=1}^{n} a_ir_i \in A \,.\, R$
yang berarti bahwa $A \subseteq A \,.\, R$, dan selanjutnya $A = A \,.\, R$
Karena R suatu ring komutatif, maka:
$A \,.\, R = R \,.\, A = A$

- Akan diperlihatkan bahwa identitasnya satu dan hanya satu.

Misalkan $E \neq R$ adalah suatu identitas. Karena $E \subseteq R$ maka ada $e_i \notin E$ dalam R dan $a_i \in A$, $i = 1, 2, 3, ..., n$ sedemikian sehingga untuk suatu $y \in A$, dapat dituliskan sebagai:
$y = a_ie_i + a_2e_2 + ... + a_ne_n = \sum_{i=1}^{n} a_ie_i \notin A \,.\, E$
yang berarti bahwa $A \,.\, E \neq A$.
Hal ini melengkapi pembuktian bahwa ada satu dan hanya satu elemen identitas, yaitu R.

4. Misal: $B \in I(R)$ adalah invers dari suatu $A \in I(R)$ maka $A \,.\, B = R$.
Dari teorema diperoleh $A \,.\, B \subseteq A$ dan $A \,.\, B \subseteq B$.
Jika $A \,.\, B = R$ maka $R \subseteq A$ dan $R \subseteq B$.
Oleh karena itu, $A \,.\, B = R$ hanya dipenuhi oleh $A = B = R$.
Jadi untuk setiap $A \in I(R)$, $A \neq R$, maka A tidak mempunyai invers.
Karena $< I(R), . >$ tidak memenuhi aksioma ini untuk memenuhi syarat grup, maka $< I(R), . >$ bukan suatu grup, tapi merupakan suatu monoid.

iii. Akan diperlihatkan apakah $< I(R), \cap >$ merupakan grup.

1. *Closure* dipenuhi dengan teorema sebelumnya.
2. Assosiatif:
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
$A \cap (B \cap C) = A \cap \{ x \mid x \in B, x \in C \}$
$= \{ x \mid x \in A, x \in B, x \in C \}$
$= \{ x \mid x \in A, x \in B \} \cap C$
$= (A \cap B) \cap C$
Jadi sifat assosiatif dipenuhi.
3. Identitas adalah R.
Bukti:
Untuk semua $A \in I(R)$, maka $A \subseteq R$, selanjutnya $A \cap R = R \cap A = A$.
Misalkan $E \notin R$ suatu identitas pada I(R), maka karena $R \in I(R)$, $E \cap R = R \cap E \neq R$.
Ini melengkapi pembuktian bahwa identitasnya ada satu dan hanya satu, yaitu R.
4. Invers.
Misalkan $B \in I(R)$ adalah invers dari suatu $A \in I(R)$; $A \cap B = R$, maka $R \subseteq A$ dan $R \subseteq B$.
Tapi $B \subseteq R$ dan $A \subseteq R$.
Dengan demikian $A \cap B = R$ jika dan hanya jika $A = B = R$.
Jadi untuk setiap $A \in I(R)$, dimana $A \notin R$, maka A tidak mempunyai invers.
Karena $< I(R), \cap >$ tidak memenuhi aksioma ini untuk memenuhi syarat grup, maka $< I(R), \cap >$ bukan suatu grup, tapi merupakan suatu monoid.

iv. Akan diperlihatkan apakah $< I(R), : >$ suatu grup.

1. *Closure* dipenuhi dengan teorema sebelumnya.
2. Assosiatif.

Untuk memperlihatkan A : (B : C) = (A : B) : C harus dibuktikan bahwa:

a. $A : (B : C) \subseteq (A : B) : C$; dan
b. $(A : B) : C \subseteq A : (B : C)$.

Misalkan $A : (B : C) = G_1$ dan $(A : B) : C = G_2$.

a. Ambil suatu $y \in G_2$ dan dari teorema sebelumnya diperoleh $BC \subseteq B \subseteq (B : C)$ maka jika $y \, . \, BC \subseteq A$, maka ada $z \in BC$ sedemikian sehingga $yz \in A$.
Karena $BC \subseteq (B : C)$ maka $z \in (B : C)$ dan $y \in G_1$.
Dari sini diperoleh $G_2 \subseteq G_1$.

b. Ambil $x \in G_1$ maka $x\,(B : C) \subseteq A$.
Karena $BC \subseteq B : C$ maka dapat dipilih suatu $z \in B : C$
tapi $z \notin BC$ sedemikian sehingga $x \, . \, z \in A$.
Karena $BC \subseteq B : C$ maka dapat dipilih suatu $z \in (B : C) \setminus BC$ dan $x \in R$, sedemikian sehingga $x \, . \, z \in B : C$.
$x \, . \, z \in B : C \rightarrow x \in G_1$.
Tapi karena $z \notin BC$, maka $x \notin A : BC$, $x \notin G_2$.
Maka $G_1 \not\subseteq G_2$.
Dari a. dan b. di atas, ternyata $G_1 \neq G_2$ atau
$A : (B : C) \neq (A : B) : C$
Jadi sifat assosiatif tidak terpenuhi.

3. Identitas.
Misalkan identitasnya adalah I, maka $I : A = A : I = A$.
   a. $I : A = \{ r \in R \mid r.\, A \subseteq I \} = A$.
   Ambil suatu $r \in (I : A)$, karena $(I : A) = A$, maka $r \in A$.
   Maka $r \, . \, A = A$
   Dari sini diperoleh $A \subseteq I$.
   b. $A : I = \{ r \in R \mid r \, . \, I \subseteq A \} = A$.
   Karena $A : I = A$, maka $r \in A$, untuk setiap $r \in (A : I)$.
   Maka $r \, . \, I \subseteq A$ dipenuhi oleh semua $I \subseteq R$.

   Dari a. dan b. diperoleh bahwa untuk setiap $A \in I(R)$ maka $A : I = I : A = A$ dipenuhi oleh semua $I \supseteq A$.
   Jadi bisa lebih dari satu identitas untuk setiap $A \in I(R)$.
   Oleh karena itu, aksioma ini tidak terpenuhi untuk memenuhi syarat grup.
4. Karena elemen identitas tidak ada (tunggal), maka demikian juga untuk elemen invers.
Karena $< I(R), : >$ tidak memenuhi tiga aksioma untuk memenuhi syarat grup, maka $< I(R), : >$ bukan suatu grup, juga bukan monoid.

Dari uraian di atas dapat diperoleh bahwa:

i. $< I(R), + >$ monoid
ii. $< I(R), \, . \, >$ monoid
iii. $< I(R), \cap >$ monoid
iv. $< I(R), \, : \, >$ bukan semi grup maupun monoid.

4. KESIMPULAN

Dari hasil pembahasan yang telah diuraikan pada bab sebelumnya, diperoleh kesimpulan bahwa:

1. Suatu ring yang bersifat komutatif terhadap perkalian disebut ring komutatif.

2. Jika R suatu ring komutatif maka setiap ideal kiri atau ideal kanan dari R adalah ideal dua sisi (ideal) dari R.
3. Jika R sebuah ring dan A, B ideal-ideal dalam R, maka:
   a. $A + B = \{ a + b \mid a \in A, b \in B \}$
      Dari sini dapat dilihat bahwa:
      1. $A + B = B + A$
      2. $A \subseteq A + B$ dan $B \subseteq A + B$
      3. $A + (B + C) = (A + B) + C$
   b. $A . B = \{ \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \mid a_i \in A, b_i \in B, n = 1, 2, 3, \ldots \}$
      Dari sini dapat dilihat bahwa:
      1. $AB = BA$
      2. $A (BC) = (AB) C$
   c. $A : B = (r \mid r \in R, rb \in A, \forall b \in B \}$
      Dari sini dapat dilihat bahwa:
      1. $A \subseteq A : B$
      2. $(A : B) B \subseteq A$
   d. $A \cap B = \{ a \mid a \in A, a \in B \}$
      Dari sini dapat dilihat bahwa:
      $A . B \subseteq A \cap B$
4. Bila A dan B ideal-ideal dalam ring R, maka:
   a. $A + B$
   b. $A . B$
   c. $A \cap B$
   d. $A : B$

   juga ideal dalam ring R.
5. Bila R sebuah ring dan A_i, B_i, $\forall$ i = 1, 2, 3, ... dan C adalah ideal-ideal dalam R, maka hubungan berikut berlaku:
   a. $\bigcap_{i-1}^{n} A_i : B = \bigcap_{i-1}^{n} (A_i : B)$
   b. $A : \sum_{i=1}^{n} B_i = \bigcap_{i=1}^{n} (A : B_i)$
   c. $(A : B) : C = A : (BC)$

5. DAFTAR PUSTAKA

Atiyah, M.F dan Mac Donald, I.G, (1969), "*Introduction to Commutative Algebra*", Addison-Wesley, Massachusets.

Fraleigh, John B, (1982), "*A First Course In Abstract Algebra*", third edition, Addison-Wesley, Massachusets.

Grove, Larry C, (1983), "*Algebra*", Academic Press, Inc.

Jusran, RC, (1979), "Aljabar Abstrak I & II", Fipia USU, Medan.

Lang, Serge, (1984), "*Algebra*", second edition, Addison-Wesley Publishing Company.

M.P, Sukirman, (1986), "Aljabar Abstrac", Universitas Terbuka, Jakarta.

Pinter, Charles C, (1982), "*A Book of Abstract Algebra*", Mc. Graw-Hill Book Company, New York.

Saracino, Daniel H, (1980), "*Abstract Algebra A First Course*", Addison-Wesley, Massachusets.