BILANGAN KROMATIK GRAF CORONA $C_n \odot C_m$

Firmansyah[1)]
Abdul Mujib[2)]

Universitas Muslim Nusantara Al-Washliyah
Jl. Garu II A, Harjosari I, Kec. Medan Amplas, Kota Medan, Sumatera Utara
email : firmansyah@umnaw.ac.id

Abstrak

Salah satu operasi antar graf yang menarik adalah operasi corona. Graf hasil operasi corona graf G terhadap graf H adalah graf dengan setiap titik dari graf G terhubung dengan semua himpunan titik dari graf H. Graf hasil operasi corona dinotasikan $G \odot H$. Oleh karena itu, tujuan dari penelitian ini adalah menghasil teori tentang bilangan kromatik pada graf hasil operasi corona. Kelas Graf yang menjadi topik kajian dalam penelitian ini adalah graf $C_n \odot C_m$, yaitu graf hasil operasi coronan antara graf siklus C_n dengan graf C_m. Hasil penelitian menunjukkan bahwa $\chi(C_n \odot C_m) = 3$ untuk m genap atau $\chi(C_n \odot C_m) = 4$ untuk m ganjil.

Kata Kunci: Operasi Corona, Graf Corona, Graf Siklus, bilangan kromatik.

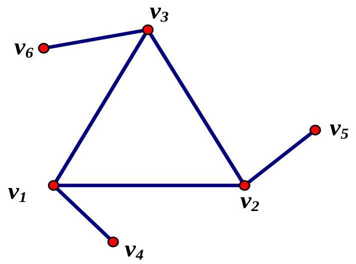
Abstract

One of the interesting operations between graphs is the corona operation. The graph resulting from the corona operation of graph G against graph H is a graph where each point of graph G is connected to all a set of vertices from graph H. The graph resulting from the corona operation is denoted $G \odot H$. Therefore, the aim of this research is to produce a theory about chromatic numbers on the graph from the corona operation. The graph class which is the topic of study in this study is the graph $C_n \odot C_m$, which is the result of the corona operation between the cycle graph C_n and the cycle graph C_m. The results showed that $\chi\,(C_n \odot C_m) = 3$ for even m or $\chi\,(C_n \odot C_m) = 4$ for odd m.

Keywords: the corona operation, the corona graph, cycle graph, chromatic numbers.

1. PENDAHULUAN

Suatu Graf G merupakan pasangan himpunan $G = (V, E)$ dengan V adalah himpunan tak kosong yang disebut titik dan $E \subseteq V^2$ yang merupakan subhimpunan 2-elemen dari V yang disebut sisi. Pada umumnya graf disajikan dalam bentuk grafis, dengan anggota himpunan V digambarkan sebagai titik, sedangkan anggota himpunan E sebagai garis yang menghubungkan dua buah titik yang bersesuaian. Sebagai contoh, Gambar 1 adalah graf G dengan $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ dan $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5,\ e_6\}$ dimana $e_1 = v_1v_2, e_2 = v_2v_3, e_3 = v_3v_1, e_4 = v_1v_4, e_5 = v_2v_5, e_6 = v_3v_6$.



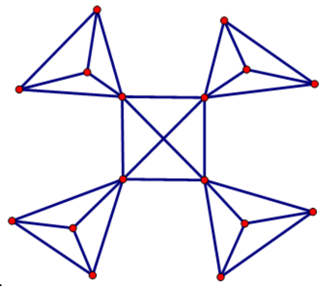
Gambar 1. Graf $G = (V, E)$

Misalkan $e_k = v_i v_j, i \neq j$ yaitu sisi yang menghubungkan titik v_i dan v_j di V. Jika titik v_i dan v_j terhubung oleh suatu sisi e_k di G, maka titik v_i dan v_j dikatakan bertetangga di G, dan titik v_i dan v_j disebut titik ujung dari e_k. Titik v_i dan v_j dikatakan saling bebas jika v_i dan v_j tidak bertetangga. Graf G dikatakan graf lengkap, dinotasikan dengan K_n jika setiap dua titik pada G bertetangga (Hartsfield & Ringel, 2003). Berdasarkan Gambar 1, jelas graf G bukan graf lengkap. Karena terdapat dua titik yang saling bebas seperti titik v_1 dengan v_5, dan v_2 dengan v_3 dan v_5.

Banyak sisi yang terkait pada suatu titik v_i di G disebut derajat titik v_i, dilambangkan dengan $d_G(v_i)$. Derajat terkecil dari suatu graf G dinotasikan dengan $\delta(G)$, sedangkan derajat terbesar pada graf G dinotasikan $\Delta(G)$ (Bondy & Murty, 2008). Graf G pada Gambar 2.2 mempunyai barisan derajat $d_G(v_1) = 3, d_G(v_2) = 3, d_G(v_3) = 3, d_G(v_4) = 1, d_G(v_5) = 1, d_G(v_6) = 1$ sehingga diperoleh $\delta(G) = 1$ dan $\Delta(G) = 3$.

1.1.Graf Hasil Operasi Korona

Misalkan G adalah graf terhubung dengan order n dan H (tidak harus terhubung) adalah graf dengan $|H| \geq 2$. Sebuah graf G korona H, dinotasikan $G \odot H$, didefinisikan sebagai graf yang dibentuk dengan mengambil n salinan (copies) graf $H_1, H_2, \dots, H_n$ dari graf H dan menghubungkan vertex ke$-i$ dari G dengan vertex-vertex pada H_i. Seluruh pembahasan pada bab ini, mengacu pada graf H_i sebagai Salinan ke$-i$ dari H yang terhubung pada vertex ke$-i$ dari G pada $G \odot H$ untuk setiap $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.
Sebagai contoh graf hasil korona $K_4 \odot K_3$ dapat dilihat pada Gambar 2. berikut ini:



Gambar 2. Graf $K_4 \odot K_3$

2. METODE

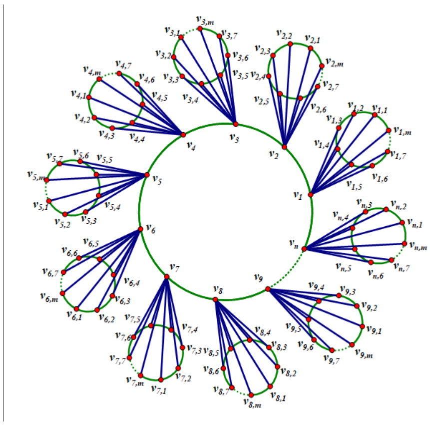
Penelitian ini merupakan penelitian kualitatif induktif. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menghasilkan teori bilangan kromatik graf hasil operasi korona. Kelas graf yang menjadi subjek penelitian adlah operasi corona antara graf siklus C_n dengan graf siklus C_m yang dinotasikan dengan $C_n \odot C_m$. Prosedur penelitian kualiatas induktif ini terdiri dari beberpa tahapan:

1. Melakukan eksplorasi perumuman konstruksi graf hasil operasi corona pada kelas graf $C_n \odot C_m$.
2. Menggambarkan bentuk perumuman graf $C_n \odot C_m$.
3. Mengeksplorasi karakterisitk dari graf $C_n \odot C_m$.
4. Membuat konjektur bilangan kromatik dari graf $C_n \odot C_m$.
5. Membuaktikan bilangan kromatik graf $C_n \odot C_m$.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1. Karakteristik Graf $C_n \odot C_m$

Graf $C_n \odot C_m$ merupakan graf hasil kali korona gran C_n terhadap graf C_m. Dimana n copi graf C_m dan setiap titik copi graf $C_m$dihubungkan dengan titik ke-i anggota himpunan titik graf C_n. Berikut grafik perumuman dari graf $C_n \odot C_m$.



Gambar 3. Graf $C_n \odot C_m$

Berdasarkan gambar 3, diperoleh beeberapa karakterisitik dari graf $C_n \odot C_m$. Himpunan titik graf $C_n \odot C_m$ di peroleh dari gabungan himpunan titik C_n dan himpuna titik graf C_m. Misalkan $V_{C_n} = \{v_i : i = 1,2,3,\dots,n\}$ dan $V_{C_m} = \{v_j : j = 1,2,3,\dots,m\}$, maka $V_{C_n \odot C_m} = V_{C_n} \cup \{v_{i,j}\}$. Oleh karena itu kardinaliltas himpuna titik $|V_{C_n \odot C_m}| = n(m+1)$.

Selanjutnya, himpunan sisi dari graf $C_n \odot C_m$ adalah gabungan dari himpunan sisi graf C_n, graf C_m, dan sisi tambahan yang menghubungkan setiap titik di C_m ke titik v_i. Misalkan $E_{C_m} = \{e_i = v_i v_{i+1} : i = 1,2,3,\dots,n\}$ dan $E_{C_m} = \{e_j = v_j v_{j+1} : j = 1,2,3,\dots,m\}$, maka $E_{C_n \odot C_m} = \{e_i\} \cup \{e_{ij} = v_{i,j} v_{i,j+1}\} \cup \{e_k = v_k v_{k,j} : k = i\}$. Oleh karena itu, kardinalitas dari $|E_{C_n \odot C_m}| = n + m^2$.

Kemudian, derajat terkecil dari graf $C_n \odot C_m$ adalah \$\delta(C_n \odot C_m) = 3$. Hal ini dapat dilihat pada titik $v_{i,j}$. Sedangkan derajat terbesar dari graf $C_n \odot C_m$ adalah $\Delta(C_n \odot C_m) = m + 2$ yang ada pada titik v_i.

3.2.Bilangan Kromatik Graf $C_n \odot C_m$

Teorema 1.

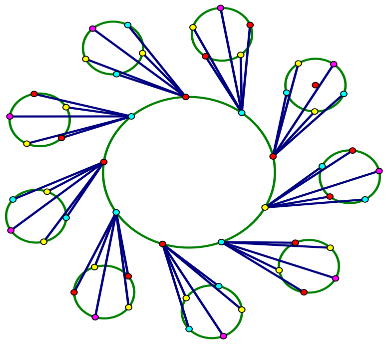
$$\chi(C_n \odot C_m) = \begin{cases} 3, \textit{Jika } m \textit{ genap} \\ 4, \textit{jika }, m \textit{ ganjil} \end{cases}$$

Bukti:

Graf $C_n \odot C_m$ terdapat 4 jenis graf, pertama n dan m ganji, kedua n dan m genap, dan ketiga n ganjil m genap. Untuk itu, pembuktikan bilangan kromatik graf $C_n \odot C_m$ dibagi dalam tiga kasus.

Kasus 1. Jika n dan m ganjil

Diketahui bahwa $\chi(C_n) = 3$, untuk n ganjil. Oleh karena itu, graf C_n pada graf $C_n \odot C_m$ dapat diwarnai dengan 3 warna. Misalkan $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ himpunan warna untuk graf C_n. Selanjutnya. untuk n copy graf C_m dimana m ganjil pada graf $C_n \odot C_m$, dapat diwarnai dengan 3 warna. Karena setiap titik dari n copy graf C_m terhubung dengan salah satu titik di C_n, maka dua warna dari C dapat digunakan untuk mewarnai titik di C_m. Sebuat titik harus diwarnai dengan warna ke-empat yaitu c_4. Jadi, $\chi(C_n \odot C_m) = 4$.■

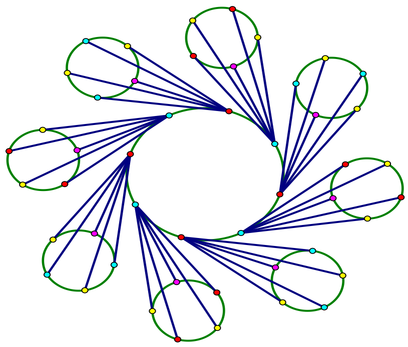


Gambar 4. $\boldsymbol{\chi(C_9 \odot C_5) = 4}$

Gambar 4 sebagai ilustrasi pewarnaan titik gra Conona $C_9 \odot C_5$. Dimana graf C_9 diwarnai dengan tiga warna merah, kbiru, dan kuning. Kemudian 9 copy dari graf C_5 diwarnai dengan tiga warna dengan tiga kombinasi warna yang berbeda yaitu: Jika graf C_5 terhubung dengan titik warna merah, maka warna yang digunakan biru, kuning, dan ungu. Jika graf C_5 terhubung dengan titik warna biru, maka warna yang digunakan merah, kuning, dan ungu. Jika graf C_5 terhubung dengan titik warna kuning, maka warna yang digunakan merah, biru, dan ungu. Dengan demikian, graf corona $C_9 \odot C_5$ memiliki warna minimum 4, yaitu merah, biru, kuning, dan ungu.

Kasus 2. Jika n dan m genap

Diketahui bahwa $\chi(C_n) = 2$, untuk n genap. Oleh karena itu, graf C_n pada graf $C_n \odot C_m$ dapat diwarnai dengan 2 warna. Misalkan $C = \{c_1, c_2\}$ himpunan warna untuk graf C_n. Selanjutnya. untuk n copy graf C_m dimana m genap pada graf $C_n \odot C_m$, juga dapat diwarnai dengan 2 warna. Karena setiap titik dari n copy graf C_m terhubung dengan salah satu titik di C_n, maka satu warna dari C dapat digunakan untuk mewarnai titik di C_m. Satu warna lagi diperoleh diluar C. Yang merupakan warna ke-tiga yaitu c_3 untuk graf corona $C_n \odot C_m$. Jadi, $\chi(C_n \odot C_m) = 3$ untuk n dan m genap. ■

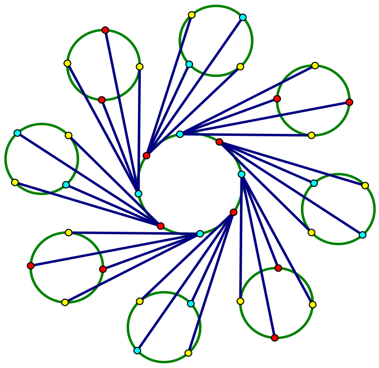


Gambar 5. $\boldsymbol{\chi(C_8 \odot C_4) = 3}$

Gambar 5 sebagai ilustrasi pewarnaan titik graf Conona $C_8 \odot C_4$. Dimana graf C_8 diwarnai dengan dua warna merah, biru. Kemudian 8 copy dari graf C_4 diwarnai dengan dua warna dengan dua kombinasi warna yang berbeda yaitu: Jika graf C_5 terhubung dengan titik warna merah, maka warna yang digunakan biru, kuning. Jika graf C_5 terhubung dengan titik warna biru, maka warna yang digunakan merah, kuning. Dengan demikian, graf corona $C_8 \odot C_4$ memiliki warna minimum 3 yaitu merah, biru, kuning.

Kasus 3. n genap dan m ganjil

Diketahui bahwa $\chi(C_n) = 2$, untuk n genap dan $\chi(C_n) = 3$, untuk n ganjil. Oleh karena itu, graf C_n pada graf $C_n \odot C_m$ dapat diwarnai dengan 2 warna dan graf C_m pada graf $C_n \odot C_m$ dapat diwarnai dengan 3 warna. Misalkan $C = \{c_1, c_2\}$ himpunan warna untuk graf C_n pada graf $C_n \odot C_m$. Selanjutnya. untuk n copy graf C_m dimana m ganjil pada graf $C_n \odot C_m$, dapat diwarnai dengan 1 warna yang sama pada graf C_n. Karena setiap titik dari n copy graf C_m terhubung dengan salah satu titik di C_n. Karena $\chi(C_m) = 3$, maka dua warna lagi diperoleh diluar C. Yang merupakan warna ke-tiga dan ke-empat untuk graf corona $C_n \odot C_m$. Jadi, $\chi(C_n \odot C_m) = 4$ untuk n genap dan m ganjil. ■

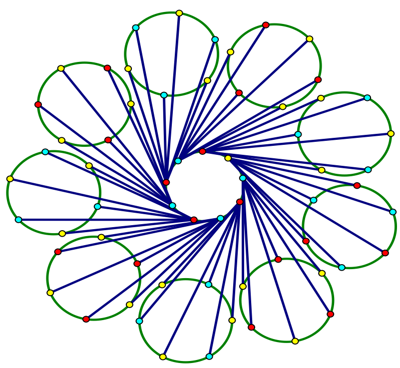


Gambar 6. $\boldsymbol{\chi(C_8 \odot C_5) = 4}$

Gambar 6 sebagai ilustrasi pewarnaan titik graf Conona $C_8 \odot C_5$. Dimana graf C_8 diwarnai dengan dua warna merah, biru. Kemudian 8 copy dari graf C_5 diwarnai dengan tiga warna dengan dua kombinasi warna yang berbeda yaitu: Jika graf C_5 terhubung dengan titik warna merah, maka warna yang digunakan biru, kuning, ungu. Jika graf C_5 terhubung dengan titik warna biru, maka warna yang digunakan merah, kuning, ungu. Dengan demikian, graf corona $C_8 \odot C_5$ memiliki warna minimum 4 yaitu merah, biru, kuning, dan ungu.

Kasus 4. n ganjil m genap

Diketahui bahwa $\chi(C_n) = 2$, untuk n genap dan $\chi(C_n) = 3$, untuk n ganjil. Oleh karena itu, graf C_n pada graf $C_n \odot C_m$ dapat diwarnai dengan 3 warna dan graf C_m pada graf $C_n \odot C_m$ dapat diwarnai dengan 2 warna. Misalkan $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ himpunan warna untuk graf C_n pada graf $C_n \odot C_m$. Selanjutnya. untuk n copy graf C_m dimana m genap pada graf $C_n \odot C_m$, dapat diwarnai dengan 2 warna yang sama pada graf C_n. Karena setiap titik dari n copy graf C_m terhubung dengan salah satu titik di C_n. Jadi, $\chi(C_n \odot C_m) = 3$ untuk n ganjil dan m genap. ■



Gambar 7. $\boldsymbol{\chi(C_9 \odot C_6) = 3}$

Gambar 7 sebagai ilustrasi pewarnaan titik graf Conona $C_9 \odot C_6$. Dimana graf C_9 diwarnai dengan tiga warna merah, biru, dan kuning. Kemudian 9 copy dari graf C_6 diwarnai dengan dua warna yang diambil dari warna C_9, dengan kombinasi warna yang berbeda yaitu: Jika graf C_6 terhubung dengan titik warna merah, maka warna yang digunakan biru, kuning. Jika graf C_6 terhubung dengan titik warna biru, maka warna yang digunakan merah, kuning. Jika graf C_6 terhubung dengan titik warna kuning, maka warna yang digunakan merah, biru. Dengan demikian, graf corona $C_9 \odot C_6$ memiliki warna minimum 3 yaitu merah, biru, kuning.

4. KESIMPULAN

a. Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian diperoleh beberpa kesimpulan sebagai berikut:

1. kardinaliltas himpuna titik $|V_{C_n \odot C_m}| = n(m+1)$
2. Kardinalitas dari $|E_{C_n \odot C_m}| = n + m^2$.
3. Derajat terkecil dari graf $C_n \odot C_m$ adalah $\delta(C_n \odot C_m) = 3$. Hal ini dapat dilihat pada titik $v_{i,j}$.
4. derajat terbesar dari graf $C_n \odot C_m$ adalah $\Delta(C_n \odot C_m) = m + 2$ yang ada pada titik v_i.
5. Bilangan kromatik permainan dari graf $\chi(C_n \odot C_m) = 3$ jika m genap, atau $\chi(C_n \odot C_m) = 4$ jika m ganjil.

b. Saran.

Berdasarkan hasil penelitian dan kesimpulan diatas, perlu dilakukan penelitian lanjutan yaitu melakukan generaisasi bilangan kromatik graf hasil operasi korona. Selain itu, perlu juga mengeksplorasi bilangan krmatik permainan pada kelas-kelas graf lainnya.

5. DAFTAR PUSTAKA

Bartnicki, T., Breˇsar, B., Grytczuk, J., Kovˇse, M., Miechowicz, Z., & Peterin, I. (2008). Game chromatic number of Cartesian product graphs. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 15(1), 1–13.

Bodlaender, H. L. (1991). On the complexity of some coloring games. *International Journal of Foundations of Computer Science*, 2(02), 133–147.

Bondy, J. A., & Murty, U. S. R. (2008). *Graph Theory with Applications*. (S. Axler & K. A. Ribet, Eds.). Springer.

Diestel, R. (2005). *Graph Teory* (*Electronic*). New York: Springer-Verlag Heidelberg.

Firmansyah., Mujib, A., Panjaitan, D.D. (2020). *Bilangan Kromatik Permainan HasilOperasi Shackel*. Laporan Penelitian PDU UMNAW.

Firmansyah, Mujib, A. (2013). Bilangan Kromatik permainan graf kaktus. *Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Terapan ke-3 (Simantap 3) Unimus Bireun 2012*.

Hartsfield, N., & Ringel, G. (2003). *PEARLS IN GRAPH THEORY A Comprehensive Introduction*. New York: Dover Publication, Inc.

Maryati, T. K., Salman, A. N. M., Baskoro, E. T., Ryan, J., & Miller, M. (2010). On H-supermagic labelings for certain Koronas and amalgamations of a connected graph. *Utilitas Mathematica*, 83, 333.

Mujib, A. (2011). *Bilangan Kromatik Permainan pada Beberapa Graf Hasil Kali Tensor*. Bandung, Indonesia: Tesis Institut Teknologi Bandung.

Mujib, A. (2019). BILANGAN KROMATIK PERMAINAN GRAF POT BUNGA ($C_m S_n$) DAN GRAF POHON PALEM ($C_k P_l S_m$). *Teorema: Teori dan Riset Matematika*, 4(1), 13-22.

Mujib, A., & Assiyatun, H. (2011). Game Chromatic Numbers of Tensor Product Graphs. *In Interior* (pp. 1–8). Medan.

Peterin, I. (2007). Game chromatic number of Cartesian product graphs. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 29, 353–357.

Pradnyana, I. B. G. (2009). *Bilangan Kromatik Permainan pada Amalgamasi-Titik Graf Lintasan, Siklus, Bintang, Roda, dan Graf Tangga*. Tugas Akhir Sarjana Matematika. Institut Teknologi Bandung, Bandung.